CAPÍTULO III – PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL)

Prof. Gilson Fernandes da Silva

Departamento de Ciências Florestais e da Madeira (DCFM)
Programa de Pós-graduação em Ciências Florestais (PGCF)
Universidade Federal Espírito Santo (UFES)

1. OBJETIVOS DO CAPÍTULO II

- Realizar treinamento em modelagem de problemas de Programação Linear (PL).

- Apresentar os métodos de solução, gráfico e analítico, de modelos de PL.

- Apresentar conceitos básicos sobre análise de sensibilidade e análise pós-otimização.

- Realizar treinamento em alguns pacotes computacionais empregados para a solução de PPL's.

2. INTRODUÇÃO

- **Dentre as técnicas de pesquisa operacional, a Programação Linear (PL) é o instrumento mais comumente empregado na resolução prática de problemas decisórios e de certa complexidade.**

- **Isto se explica, por um lado, pela versatilidade do instrumento, e por outro, pelo nível relativamente pouco sofisticado dos seus fundamentos matemáticos.**

“***A PL é uma técnica de otimização utilizada para alocação de recursos escassos entre atividades competitivas de maneira ótima***”.

A PL como técnica de otimização procura obter soluções ótimas para modelos matemáticos, lembrando que modelos nada mais são do que simplificações da realidade.

No nosso caso interessa especialmente as realidades florestais.

3. O CONCEITO DE LINEARIDADE

MODELOS LINEARES: São aqueles em que as variáveis se relacionam de forma aditiva.

Função Linear

$$Q(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n$$

em que

$x_1, x_2, \dots, x_n$ são variáveis e $c_1, c_2, \dots, c_n$ são os coeficientes das variáveis.

Exemplos:

$Q(x) = 5x_1 + 12x_2 - 8x_3$

$Q(x) = 42Pinus + 28Eucalipto$

Contra-exemplos (funções não-lineares):

$Q(x) = 4x_1^2 + 7x_2^2$

$Q(x) = 10Pinus^2 + 8Eucalipto^3$

$Q(x) = 6x_1x_2$

Modelos Lineares: ***Em geral, são mais tratáveis, porém menos reais.***

Modelos Não-lineares: ***Menos tratáveis, porém mais realísticos.***

Exemplo de uma situação de linearidade: Um metro cúbico de madeira custa R$ 42,00, sendo x a quantidade de madeira a ser vendida. Esta realidade pode ser expressa matematicamente pela seguinte equação:

$R(x) = 42x$, sendo $R(x)$ igual ao valor arrecadado com a venda de madeira. A Figura 1 ilustra graficamente esta situação.

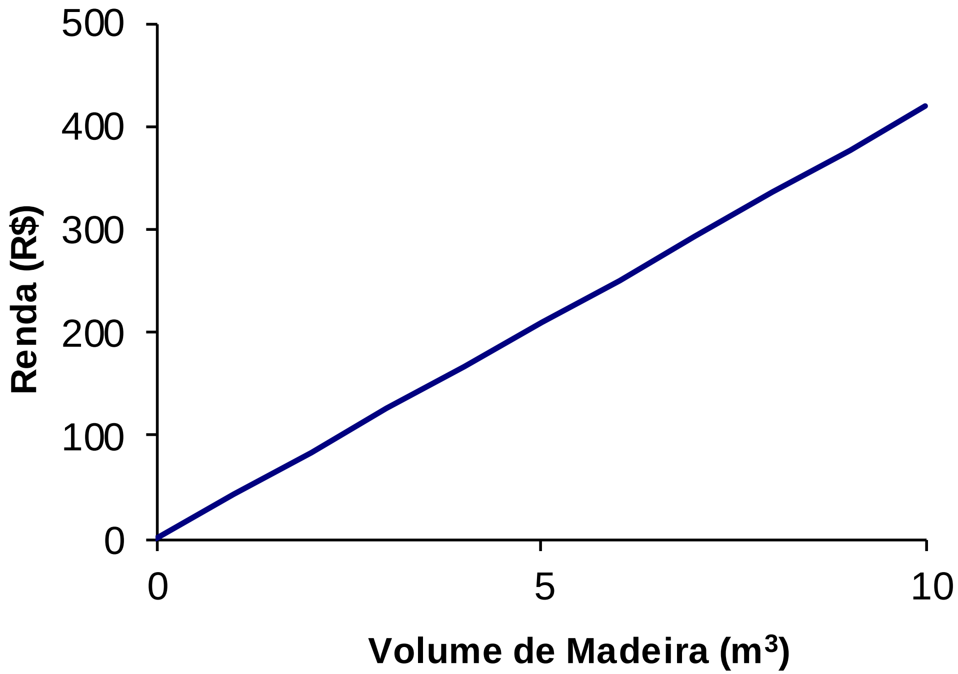


Figura 1 – Ilustração gráfica de uma situação de linearidade.

Exemplo de uma situação de não-linearidade: O preço pago pela madeira depende da quantidade x a ser vendida. Assim, considerando-se que para uma determinada quantidade de madeira x vendida é dado um desconto no preço, tem-se:

Renda $\Rightarrow$ $R(x) = x\,P(x)$

em que

$P(x) = 42 - 0{,}01x$ (função de desconto)

$R(x) = x(42 - 0{,}01x)$

$R(x) = 42x - 0{,}01x^2$

4. O MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Forma Padrão:

$$MAXIMIZAR\ Q(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Função objetivo

s.a. (sujeito a)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

Restrições funcionais ou estruturais

$$x_i \geq 0$$

Restrições de não-negatividade

Além da forma padrão, outras formas de apresentação podem ser consideradas (Hillier e Lieberman, 2010):

1 – Minimizar ao invés de maximizar a F.O.

2 – Algumas restrições funcionais do tipo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_i$$

3 – Algumas restrições funcionais do tipo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_i$$

4 – Eliminar algumas restrições não-negativas.

Recurso	Atividade				Quantidade de Recursos Disponíveis
	1	2	...	n	
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{2n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
$\vdots$	...	...	...	...	$\vdots$
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
Contribuição a Z por unidade de atividade	c_1	c_2	...	c_n	

Fonte: Hillier e Lieberman, 2010

De acordo com Bregalda (2000), a forma padrão do modelo de PL pode ser sintetizada pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad em\ que\ b_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = Q(x) \quad \rightarrow \quad Max! \end{cases}$$

Ou pela forma matricial:

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ c'x = Q(x) \quad \rightarrow \quad Min! \end{cases}$$

Em que:

A = matriz m x n, construida por todos os elementos a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$ *e* $j = 1, 2, \ldots, n$

b = vetor m x 1, constituído por todos os elementos b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$

c = vetor n x 1, constituído por todos os elementos c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$

x = vetor n x 1, constituído por todos os elementos x_j, $i = 1, 2, \ldots, n$

5. HIPÓTESES DO MODELO DE PL

De acordo com Hillier e Lieberman (2010), o modelo de PL deve atender às seguintes hipóteses:

PROPORCIONALIDADE:

A contribuição de cada atividade ao valor da função objetivo $Q(x)$ é proporcional ao nível da atividade x_j (ver o ter $c_j x_j$ da F.O.).

A contribuição de cada atividade ao lado esquerdo de cada restrição funcional é proporcional ao nível da atividade x_j , conforme representado pelo termo a_{ij} nas restrições.

ADITIVIDADE: Toda função em um modelo de Programação Linear é a soma das contribuições individuais das respectivas atividades.

DIVISIBILIDADE: As variáveis de decisão em um modelo de PL podem assumir quaisquer valores, inclusive valores não-inteiros (variáveis contínuas).

CERTEZA: O valor atribuído a cada parâmetro (os coeficientes c_j, a_{ij} e b_i) de um modelo de PL é assumido como uma constante conhecida.

6. MODELANDO PROBLEMAS DE PL

A Programação Linear apresenta alguns modelos clássicos que são amplamente divulgados na literatura e têm os mais variados propósitos nas mais diversas áreas. A seguir, apresentaremos alguns destes modelos.

6.1 – O modelo de alocação de recursos

Uma empresa dispõe dos seguintes recursos: MO_1, MO_2, MQ_A, MQ_B, *LEITE*, e estes recursos devem ser alocados na produção de: Leite C, Manteiga e Requeijão.

As variáveis $\boldsymbol{MO_1}$ e $\boldsymbol{MO_2}$, significam, respectivamente, mão-de-obra 1 e 2; as variáveis $\boldsymbol{MQ_A}$ e $\boldsymbol{MQ_B}$, máquinas A e B e a variável ***LEITE*** representa a quantidade de leite bruto para processamento.

A tabela abaixo mostra o requerimento de recursos por unidade de produtos:

Recursos	Produtos		
	Leite C	Manteiga	Requeijão
MO_1	2,0	1	3
MO_2	0,0	4	3
MQ_A	0,5	2	1
MQ_B	0,0	2	3
LEITE	0,8	8	4

Sendo que a disponibilidade de recursos é dada por:

Recurso	MO_1	MO_2	MQ_A	MQ_B	LEITE
Disponib.	**400**	**500**	**300**	**350**	**1000**

O lucro esperado por cada unidade produzida é:

Leite C = $ 0,15; **Manteiga** = $ 2,00 e **Requeijão** = 0,80.

O objetivo é fazer a alocação dos recursos disponíveis de modo a maximizar o lucro esperado.

Proposta de modelagem do problema:

Passo 1: Definir as variáveis de decisão do problema. É importante lembrar: "*Trata-se de variáveis quantitativas contínuas, isto é, quantidade de alguma coisa*".

Passo 2: Construir a função objetivo. Maximizar ou minimizar? Dica: É uma função linear, e, portanto, é preciso identificar os coeficientes da função e relacioná-los com as variáveis definidas no passo 1.

Passo 3: Construir as restrições do modelo. Dica: Para cada recurso limitante, estará associado uma restrição. Outras restrições dependerão das caratecísticas do problema e do que deseja o tomador de decisão.

<u>Passo 4</u>: Construir as restrições de não-negatividade. As demais restrições podem variar de modelo para modelo, mas as de não-negatividade são obrigatórias em todos os modelos.

<u>Solução</u>:

<u>Passo 1</u>: Definir as variáveis de decisão.

$LEITEC$ = Quantidade a ser produzida de leite C.

$MANT$ = Quantidade a ser produzida de manteiga.

REQ = Quantidade a ser produzida de requeijão.

Passo 2: Construir a função objetivo.

$$Max\ Lucro = 0{,}15*LEITEC + 2{,}00*MANT + 0{,}80*REQ$$

Passo 3: Construir as restrições do modelo.

$$
\begin{array}{llll}
2{,}0*LEITEC + & MANT + 3*REQ & \leq 400 & (Rest.\ MO1) \\
 & 4*MANT + 3*REQ & \leq 500 & (Rest.\ MO2) \\
0{,}5*LEITEC + 2*MANT + & REQ & \leq 300 & (Rest.\ MQA) \\
 & 2*MANT + 3*REQ & \leq 350 & (Rest.\ MQB) \\
0{,}8*LEITEC + 8*MANT + & 4*REQ & \leq 1000 & (Rest.\ Leite)
\end{array}
$$

Passo 4: Construir as restrições de não-negatividade.

$LEITEC$, $MANT$ E $REQ \geq 0$

O MODELO DE PL COMPLETO

*Max Lucro = 0,15*LEITEC + 2,00*MANT + 0,80*REQ*

Sujeito a: (s.a.)

$$
\begin{aligned}
2{,}0 \cdot LEITEC + \quad\ \, MANT + 3 \cdot REQ &\leq 400\\
4 \cdot MANT + 3 \cdot REQ &\leq 500\\
0{,}5 \cdot LEITEC + 2 \cdot MANT + \quad\ \, REQ &\leq 300\\
2 \cdot MANT + 3 \cdot REQ &\leq 350\\
0{,}8 \cdot LEITEC + 8 \cdot MANT + 4 \cdot REQ &\leq 1000
\end{aligned}
$$

$LEITEC$, $MANT$ E $REQ \geq 0$

O MODELO GENERALIZADO

Sejam as variáveis de decisão x_1, x_2, ... , x_n representando a quantidade a ser produzida de cada produto *j*, $j = 1, 2, \ldots , n$.

Sejam ainda: c_1, c_2, ..., c_n o lucro esperado por unidade de cada produto e a_{ij} a quantidade do recurso *i* necessária para se produzir uma unidade do produto *j*.

Sejam *m* recursos disponíveis nas quantidades b_1, b_2,..., b_m que deverão ser alocados na produção de *n* produtos.

O MODELO GENERALIZADO

$$Max\ Q(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

<u>Sujeito a</u>: (s.a.)

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
\quad \vdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m
\end{array}
$$

$$x_i \geq 0$$

6.2 – O modelo da dieta

Deseja-se formular um kg de ração a partir de 4 ingredientes. A composição química e o preço dos ingredientes são apresentados na tabela a seguir:

Ingrediente	ING_1	ING_2	ING_3	ING_4
Proteína	0,01	0,08	0,05	0,03
Cálcio	0,01	0,04	0,06	0,05
Fósforo	0,04	0,06	0,08	0,02
Gordura	0,08	0,05	0,02	0,06
Preço (R$/Kg)	**0,40**	**0,75**	**1,25**	**0,60**

Cada kg de ração deve atender:

Nutriente	Min.	Max.
Proteína	0,05	0,40
Cálcio	0,04	0,20
Fósforo	0,05	0,20
Gordura	0,00	0,25

A partir dos dados apresentados, formular um modelo para produzir um quilo de ração ao menor custo possível.

Solução:

Passo 1: Definir as variáveis de decisão.

ING_1 = Quantidade, em kg, do ingrediente 1 na ração.

ING_2 = Quantidade, em kg, do ingrediente 2 na ração.

ING_3 = Quantidade, em kg, do ingrediente 3 na ração.

ING_4 = Quantidade, em kg, do ingrediente 4 na ração.

Passo 2: Construir a função objetivo.

$Min\ Custo = 0{,}40\ ING_1 + 0{,}75\ ING_2 + 1{,}25\ ING_3 + 0{,}60\ ING_4$

Passo 3: Construir as restrições do modelo.

$0{,}01\ ING_1 + 0{,}08\ ING_2 + 0{,}05\ ING_3 + 0{,}03\ ING_4 \leq 0{,}40$ (proteína)
$0{,}01\ ING_1 + 0{,}08\ ING_2 + 0{,}05\ ING_3 + 0{,}03\ ING_4 \geq 0{,}05$ (proteína)

$0{,}01\ ING_1 + 0{,}04\ ING_2 + 0{,}06\ ING_3 + 0{,}06\ ING_4 \leq 0{,}20$ (cálcio)
$0{,}01\ ING_1 + 0{,}04\ ING_2 + 0{,}06\ ING_3 + 0{,}06\ ING_4 \geq 0{,}04$ (cálcio)

$0{,}04\ ING_1 + 0{,}06\ ING_2 + 0{,}08\ ING_3 + 0{,}02\ ING_4 \leq 0{,}20$ (fósforo)
$0{,}04\ ING_1 + 0{,}06\ ING_2 + 0{,}08\ ING_3 + 0{,}02\ ING_4 \geq 0{,}05$ (fósforo)

$0{,}08\ ING_1 + 0{,}05\ ING_2 + 0{,}02\ ING_3 + 0{,}06\ ING_4 \leq 0{,}25$ (gordura)
$0{,}08\ ING_1 + 0{,}05\ ING_2 + 0{,}02\ ING_3 + 0{,}06\ ING_4 \geq 0{,}00$ (gordura)

$ING_1 + ING_2 + ING_3 + ING_4 = 1$ (Total de ração produzida)

Passo 4: Construir as restrições de não-negatividade.

ING_1, ING_2, ING_3 **e** $ING_4 \geq 0$

O MODELO DE PL COMPLETO

$Min\ Custo = 0{,}40\ ING_1 + 0{,}75\ ING_2 + 1{,}25\ ING_3 + 0{,}60\ ING_4$

<u>Sujeito a</u>: (s.a.)

$0{,}01\ ING_1 + 0{,}08\ ING_2 + 0{,}05\ ING_3 + 0{,}03\ ING_4 \leq 0{,}40$ (proteína)
$0{,}01\ ING_1 + 0{,}08\ ING_2 + 0{,}05\ ING_3 + 0{,}03\ ING_4 \geq 0{,}05$ (proteína)

$0{,}01\ ING_1 + 0{,}04\ ING_2 + 0{,}06\ ING_3 + 0{,}06\ ING_4 \leq 0{,}20$ (cálcio)
$0{,}01\ ING_1 + 0{,}04\ ING_2 + 0{,}06\ ING_3 + 0{,}06\ ING_4 \geq 0{,}04$ (cálcio)

$0{,}04\ ING_1 + 0{,}06\ ING_2 + 0{,}08\ ING_3 + 0{,}02\ ING_4 \leq 0{,}20$ (fósforo)
$0{,}04\ ING_1 + 0{,}06\ ING_2 + 0{,}08\ ING_3 + 0{,}02\ ING_4 \geq 0{,}05$ (fósforo)

$0{,}08\ ING_1 + 0{,}05\ ING_2 + 0{,}02\ ING_3 + 0{,}06\ ING_4 \leq 0{,}25$ (gordura)
$0{,}08\ ING_1 + 0{,}05\ ING_2 + 0{,}02\ ING_3 + 0{,}06\ ING_4 \geq 0{,}00$ (gordura)

$ING_1 + ING_2 + ING_3 + ING_4 = 1$ (Total de ração produzida)

$\mathbf{ING_1, ING_2, ING_3}$ **e** $\mathbf{ING_4 \geq 0}$

O MODELO GENERALIZADO

Considere:

x_j a variável de decisão representando a quantidade do ingrediente j presente na mistura, para $j = 1, 2, 3, ..., n$

Sejam j ingredientes, para $j = 1, 2, 3, ..., n$;

Seja c_j o custo unitário do ingrediente j;

b_i como a exigência nutricional referente ao nutriente i, para $i = 1, 2, 3, ..., m$;

a_{ij} como a quantidade do nutriente i presente em uma unidade do ingrediente j.

O MODELO GENERALIZADO

$Min\ c(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

Sujeito a: (s.a.)

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$ *(Limite superior do nutriente 1)*

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1$ *(Limite inferior do nutriente 1)*

$\vdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$ *(Limite superior do nutriente 1)*

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m$ *(Limite inferior do nutriente 1)*

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = k$ (k = total produzido)

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ...\ ,\ x_n \geq 0$

6.3 – O modelo de transporte

Um produto está disponível nas localidades O_1, O_2, O_3, O_4 e O_5. Tal produto é demandado por clientes localizados em D_1, D_2 e D_3. O custo unitário de transporte para este produto é:

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
D_1	0,12	0,15	0,18	0,16	0,80
D_2	0,10	0,18	0,20	0,14	0,22
D_3	0,10	0,16	0,10	0,12	0,17

- ✓ As quantidades demandadas nas localidades D_1, D_2, e D_3 são, respectivamente, 2000, 2400 e 1900.

- ✓ As quantidades disponíveis nas localidades O_1, O_2, O_3, O_4 e O_5 são, respectivamente, 1800, 1200, 1400, 1000 e 900. Formule um modelo de PL que minimize o custo total de transporte do produto, respeitando a demanda de cada cliente e a disponibilidade em cada local.

Solução:

Passo 1: Definir as variáveis de decisão.

Seja O_iD_j a variável de decisão representando a quantidade enviada da localidade *i* para o cliente *j*.

Passo 2: Construir a função objetivo.

$$Min\ Custo = 0{,}12\ O_1D_1 + 0{,}10\ O_1D_2 + 0{,}10\ O_1D_3 + \ldots + 0{,}22\ O_5D_2 + 0{,}17\ O_5D_3$$

Passo 3: Construir as restrições do modelo.

$O_1D_1 + O_2D_1 + O_3D_1 + O_4D_1 + O_5D_1 = 2000$ (Cliente 1)
$O_1D_2 + O_2D_2 + O_3D_2 + O_4D_2 + O_5D_2 = 2400$ (Cliente 2)
$O_1D_3 + O_2D_3 + O_3D_3 + O_4D_3 + O_5D_3 = 1900$ (Cliente 3)

$O_1D_1 + O_1D_2 + O_1D_3 = 1800$ (localidade 1)
$O_2D_1 + O_2D_2 + O_2D_3 = 1200$ (localidade 2)
$O_3D_1 + O_3D_2 + O_3D_3 = 1400$ (localidade 3)
$O_4D_1 + O_4D_2 + O_4D_3 = 1000$ (localidade 4)
$O_5D_1 + O_5D_2 + O_5D_3 = 900$ (localidade 5)

Passo 4: Construir as restrições de não-negatividade.

$\boldsymbol{O_iD_j \geq 0}$

O MODELO DE PL COMPLETO

Min Custo $= 0{,}12\ O_1D_1 + 0{,}10\ O_1D_2 + 0{,}10\ O_1D_3 + \ldots + 0{,}22\ O_5D_2 + 0{,}17\ O_5D_3$

<u>Sujeito a</u>: (s.a.)

$O_1D_1 + O_2D_1 + O_3D_1 + O_4D_1 + O_5D_1 = 2000$ (Cliente 1)
$O_1D_2 + O_2D_2 + O_3D_2 + O_4D_2 + O_5D_2 = 2400$ (Cliente 2)
$O_1D_3 + O_2D_3 + O_3D_3 + O_4D_3 + O_5D_3 = 1900$ (Cliente 3)

$O_1D_1 + O_1D_2 + O_1D_3 = 1800$ (localidade 1)
$O_2D_1 + O_2D_2 + O_2D_3 = 1200$ (localidade 2)
$O_3D_1 + O_3D_2 + O_3D_3 = 1400$ (localidade 3)
$O_4D_1 + O_4D_2 + O_4D_3 = 1000$ (localidade 4)
$O_5D_1 + O_5D_2 + O_5D_3 = 900$ (localidade 5)

$\boldsymbol{O_iD_j \geq 0}$

O MODELO GENERALIZADO

Sejam:

- m origens i (disponibilidade do produto);
- n destinos j (demandas do produto);
- a_i como a quantidade disponível do produto na localidade de origem i;
- b_j como a quantidade demandada do produto no destino j;
- c_{ij} como custo unitário de transporte do produto da origem i para o destino j;
- x_{ij} como a quantidade do produto enviada de i para j.

O MODELO GENERALIZADO

$$Min\ c(x) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$$

s.a.

$$
\begin{array}{ll}
x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 & \text{(Cliente 1)} \\
x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2 & \text{(Cliente 2)} \\
\vdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \vdots & \\
x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n & \text{(Cliente } n\text{)} \\
\vdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \vdots & \\
x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1 & \text{(Origem 1)} \\
x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2 & \text{(Origem 2)} \\
\vdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \vdots & \\
x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m & \text{(Origem } m\text{)}
\end{array}
$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall\ i, j$$

Este modelo vale para:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \Rightarrow$$ Equilibrio entre oferta e demanda.

O que fazer se $$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Alternativa 1: Nas restrições de oferta faz-se a substituição do sinal de = pelo sinal de $\leq$.

Alternativa 2: Criar um cliente fantasma $n + 1$ para receber o excedente, sendo:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$ e com $C_{i,\, n+1} = m.q.o.d.,\ \forall\ i$

6.4 – O modelo de corte e empacotamento

Em uma determinada serraria, deseja-se traçar duas árvores, cujos troncos têm 13 metros cada, em três tamanhos de tora diferentes, a saber: 4, 5 e 6 metros. Admitindo-se que a serraria tem que produzir pelo menos duas toras de 4 e 5 metros e 1 tora de 6 metros, e que as toras de 4, 5 e 6 metros valem no mercado, 80, 90 e 100 reais, respectivamente, encontrar o melhor esquema de corte para as duas árvores de modo a maximizar o lucro da serraria.

Solução:

Passo 1: Definir as variáveis de decisão. No caso deste problema é necessário idealizar as alternativas possíveis de corte. Veja o seguinte esquema:

Em função das alternativas possíveis e do número de árvores, tem-se a seguinte variável de decisão:

Seja X_{ij} uma variável binária {0, 1}, em que:

0 = Não adotar a alternativa de corte *i* para a árvore *j*.

1 = Adotar a alternativa de corte *i* para a árvore *j*.

Passo 2: Construir a função objetivo.

$$Max\ Renda = 240\ X_{11} + 250\ X_{21} + 180\ X_{31} + 180\ X_{41} + 190\ X_{51} + 200\ X_{61} + 240\ X_{12} + 250\ X_{22} + 180\ X_{32} + 180\ X_{42} + 190\ X_{52} + 200\ X_{62}$$

Passo 3: Construir as restrições do modelo.

$3\ X_{11} + 3\ X_{12} + 2\ X_{21} + 2\ X_{22} + X_{31} + X_{32} > 2$ **(Demanda pela tora de 4 m)**

$X_{21} + X_{22} + 2\ X_{41} + 2\ X_{42} + X_{51} + X_{52} > 2$ **(Demanda pela tora de 5 m)**

$X_{31} + X_{32} + X_{51} + X_{52} + 2\ X_{61} + 2\ X_{62} > 1$ **(Demanda pela tora de 6 m)**

$12\ X_{11} + 13\ X_{21} + 10\ X_{31} + 10\ X_{41} + 11\ X_{51} + 12\ X_{61} < 13$ **(Limite da árvore 1)**

$12\ X_{12} + 13\ X_{22} + 10\ X_{32} + 10\ X_{42} + 11\ X_{52} + 12\ X_{62} < 13$ **(Limite da árvore 2)**

Passo 4: Construir as restrições de não-negatividade.

$$O_iD_j \in \{0, 1\}$$

O MODELO DE PL COMPLETO

Max Renda $= 240\ X_{11} + 250\ X_{21} + 180\ X_{31} + 180\ X_{41} + 190\ X_{51} + 200\ X_{61} + 240\ X_{12} + 250\ X_{22} + 180\ X_{32} + 180\ X_{42} + 190\ X_{52} + 200\ X_{62}$

Sujeito a: (s.a.)

$3\ X_{11} + 3\ X_{12} + 2\ X_{21} + 2\ X_{22} + X_{31} + X_{32} > 2$ **(Demanda pela tora de 4 m)**
$X_{21} + X_{22} + 2\ X_{41} + 2\ X_{42} + X_{51} + X_{52} > 2$ **(Demanda pela tora de 5 m)**
$X_{31} + X_{32} + X_{51} + X_{52} + 2\ X_{61} + 2\ X_{62} > 1$ **(Demanda pela tora de 6 m)**

$12\ X_{11} + 13\ X_{21} + 10\ X_{31} + 10\ X_{41} + 11\ X_{51} + 12\ X_{61} < 13$ **(Limite da árvore 1)**
$12\ X_{12} + 13\ X_{22} + 10\ X_{32} + 10\ X_{42} + 11\ X_{52} + 12\ X_{62} < 13$ **(Limite da árvore 2)**

$O_iD_j \in \{0, 1\}$

O MODELO GENERALIZADO

Sejam:

- m = número de alternativas i (alternativas de corte);
- n = número de objetos j (objetos a serem cortados);
- l = número de tamanhos k de corte;
- a_{ij} = número ou o comprimento total quando se utiliza a alternativa de corte i para o objeto j.
- d_k = demanda para cada k-ésimo tamanho.
- b_n = tamanho total disponível para corte para o objeto j.
- c_{ij} = renda ou resíduo quando se utiliza a alternativa i para se cortar o objeto j;
- x_{ij} = adotar ($x_{ij} = 1$) ou não ($x_{ij} = 0$) a alternativa i para se cortar o objeto j.

O MODELO GENERALIZADO

Min ou Max Q(x) = $c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{*}\, x_{ij}^{*} \geq d_1$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{*}\, x_{ij}^{*} \geq d_2$$

Restrições de demanda

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{*}\, x_{ij}^{*} \geq d_l$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}^{**} x_{i1} \leq b_1$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i2}^{**} x_{i2} \leq b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{in}^{**} x_{in} \leq b_n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Restrições de tamanho máximo de cada objeto

Em que:

x_{ij}^{*} = todas as variáveis x_{ij} associadas ao k-ésimo tamanho de corte.

a_{ij}^{*} = números de objetos com o tamanho k associados às variáveis x_{ij}^{*}.

a_{ij}^{**} = comprimento total quando se utiliza a alternativa de corte *i* para o objeto *j.*

Outro maneira de formular o modelo de corte e empacotamento proposto

A principal diferença deste paradigma para o anterior é que, neste caso, a variável de decisão é definida como:

x_{ij} = número de toras de tamanho *i* a serem cortadas na árvore *j*.

Em função disto, o modelo teria a seguinte formulação:

Max Renda = 80 X_{11} *+ 80* X_{12} *+ 90* X_{21} *+ 90* X_{22} *+ 100* X_{11} *+ 100* X_{12}

Sujeito a: (s.a.)

$X_{11} + X_{12} \geq 2$ **(Demanda pela tora de 4 m)**

$X_{21} + X_{22} \geq 2$ **(Demanda pela tora de 5 m)**

$X_{31} + X_{32} \geq 1$ **(Demanda pela tora de 6 m)**

$4\,X_{11} + 5\,X_{21} + 6\,X_{31} \leq 13$ **(Limite da árvore 1)**

$4\,X_{12} + 5\,X_{22} + 6\,X_{32} \leq 13$ **(Limite da árvore 2)**

$X_{ij} \geq 0$ ***e inteiro.***

6.5 – Outros modelos

6.5.1 – O modelo do jovem atarefado

João tem duas namoradas, Maria e Luiza. Cada saída de 3 horas com Maria custa R$ 24,00 e com Luiza custa R$ 16,00. Seu orçamento permite dispor R$ 96,00/mês para diversão. João dispõe de no máximo 18 horas e 40.000 calorias para diversão durante o mês. Cada saída com Maria consome 5000 calorias e com Luiza o dobro. Ele gosta das duas com a mesma intensidade. O objetivo de João é maximizar o número de saídas.

<u>Solução</u>:

<u>Passo 1</u>: Definir as variáveis de decisão.

NM = número de saídas de 3 horas com Maria

NL = número de saídas de 3 horas com Luiza

<u>Passo 2</u>: Construir a função objetivo.

$Max = NM + NL$

Passo 3: Construir as restrições do modelo.

$$24\,NM + 16\,NL \leq 96 \quad \text{(restrição de orçamento)}$$

$$NM + NL \leq 06 \quad \text{(restr. do núm. de saídas)}$$

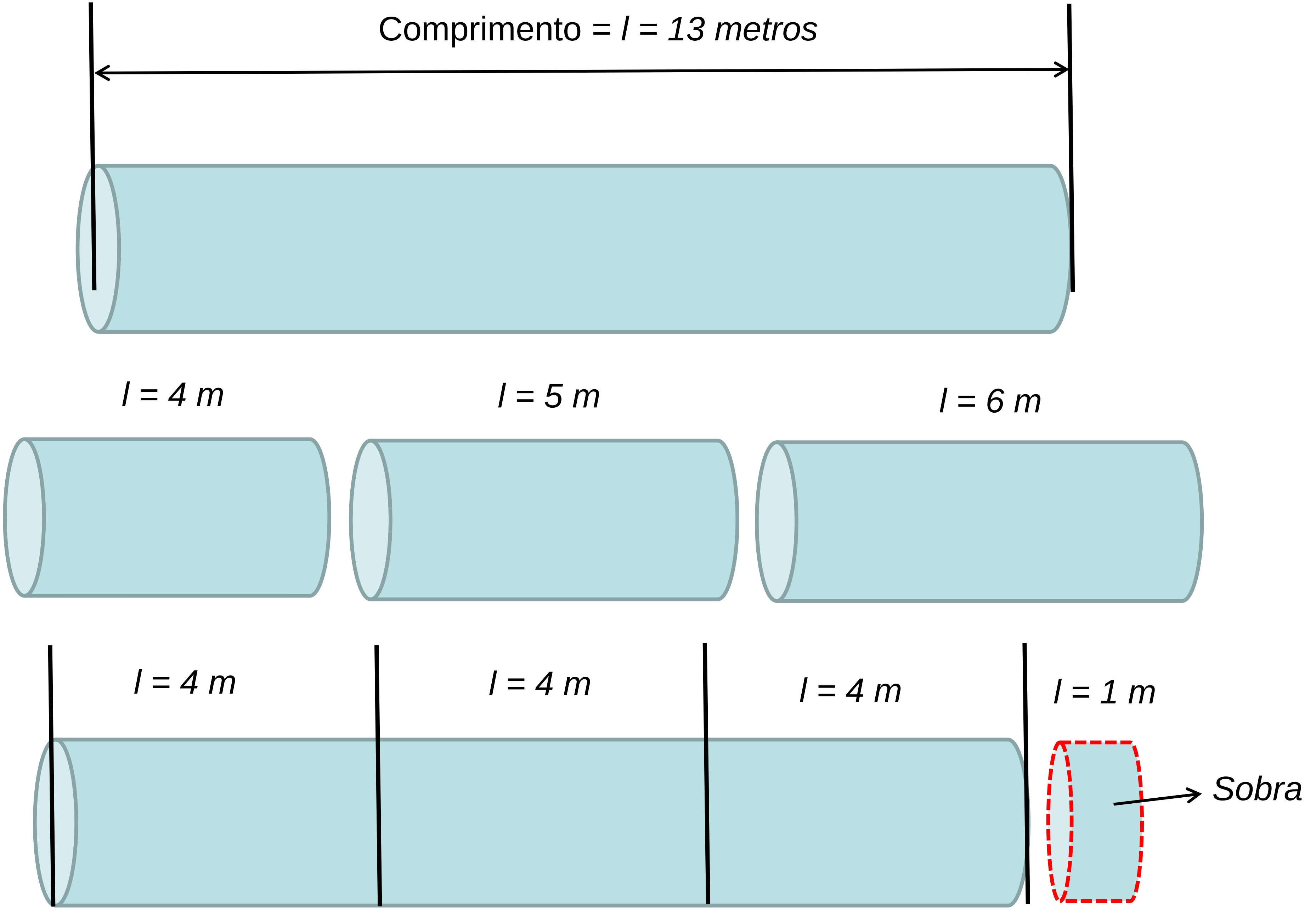
$$500\,NM + 1000\,NL \leq 40000 \quad \text{(restr. do núm. de calorias)}$$

Passo 4: Construir as restrições de não-negatividade.

$$NM \geq 0 \quad \text{e inteiro}$$

$$NL \geq 0 \quad \text{e inteiro}$$

FIM DO CAPITULO III a



Comprimento = l = 13 metros
l = 4 m
l = 5 m
l = 6 m
l = 4 m
l = 4 m
l = 4 m
l = 1 m
Sobra

Alternativas de corte	Sobra
1 – 4, 4 e 4 metros	1 metro
2 – 4, 4 e 5 metros	0 metro
3 – 4 e 6 metros	3 metros
4 – 5 e 5 metros	3 metros
5 – 5 e 6 metros	2 metros
6 – 6 e 6 metros	1 metro

COMPRIMENTO DE TORA	ALTERNATIVAS DE CORTE						VALOR DA TORA
	1	2	3	4	5	6	
1	3	2	1	0	0	0	80
2	0	1	0	2	1	0	90
3	0	0	1	0	1	2	100
Resto	1	0	3	3	2	1	